

学校编号: 10384  
学 号: 17020051301589

分类号 \_\_\_\_\_ 密级 \_\_\_\_\_  
UDC \_\_\_\_\_

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

# 具有弱 Allee 效应的捕食 - 食饵系统的分支

Bifurcations of a Predator-prey System with Weak  
Allee effect

林 荣 珍

指导教师姓名: 白 正 简 副教授

刘 胜 强 教 授

专 业 名 称: 基 础 数 学

论文提交日期: 2008 年 4 月

论文答辩时间: 2008 年 月

学位授予日期: 2008 年 月

答辩委员会主席: \_\_\_\_\_

评 阅 人: \_\_\_\_\_

2008 年 4 月

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年 月 日

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密( )，在          年解密后适用本授权书。

2、不保密( )。

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名:                      日期:          年    月    日

导师签名:                      日期:          年    月    日

# 目 录

中文摘要.....	1
英文摘要.....	2
第一章 引言.....	3
第二章 具有弱 Allee 效应的捕食 – 食饵系统平衡点及局部分析 .....	6
第三章 具有弱 Allee 效应的捕食 – 食饵系统的分支情况.....	16
第四章 讨论.....	24
参考文献.....	26
致谢.....	29

# Contents

Chinese Abstract .....	1
English Abstract .....	2
Chapter 1. Preface .....	3
Chapter 2. General phase portraits analysis of equilibria .....	6
Chapter 3. Bifurcations of Predator-prey Model with Weak Allee Effect .....	16
Chapter 4. Discussion .....	24
References .....	26
Acknowledge .....	29

## 中文摘要

本文主要对食饵上受到弱 Allee 效应作用的具有非单调功能反应的捕食 - 食饵系统进行研究。我们的模型类似于 Xiao 在文章 “Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response, SIAM J. APPL. Math., 61(2001), pp. 1445-1472” 里所研究的模型, 但我们的模型在食饵上又多了表示弱 Allee 效应的项。在文章中我们通过对模型进行定性分析和分支分析, 从而获得模型的全局动力性质。由文中的分支分析结果可知系统将出现多种分支情况, 这包括鞍 - 结分支、超临界和亚临界 Hopf 分支, 同宿环分支, 而当参数变化时, 将出现余维为 2 的尖点型分支 (如 Bogdanov-Takens 分支)。

**关键词:** 捕食 - 食饵系统; 弱 Allee 效应; 非单调功能反应; 分支; 极限环.

## ABSTRACT

We formulate and study a predator-prey model with nonmonotonic functional response type and weak Allee effects on the prey. Our model is similar to the system studied by Xiao, et al in [Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response, SIAM J. Appl. Math., 61(2001), pp. 1445-1472] but contains an extra term describing weak Allee effects on the prey. We obtain the global dynamics of the model by combining the global qualitative and bifurcation analyses; Our bifurcation analysis of the model indicates that it exhibits numerous kinds of bifurcation phenomena, including the saddle-node bifurcation, the supercritical and subcritical Hopf bifurcations, and the homoclinic bifurcation, as the values of parameters vary. In the generic case, the model has the bifurcation of cusp type of codimension 2 (i.e., Bogdanov-Takens bifurcation).

**Keywords:** Predator-Prey; Weak Allee effects; Nonmonotonic; Bifurcations; Limit cycle.

## 第一章 引言

自 Lotka[15] 和 Volterra[16] 的研究之后, 捕食 - 食饵系统就引起了广泛的研究 (见 [11],[18])。我们知道在一些情况下, 种群的初值大小将决定系统的全局动力性质, 比如具有 Allee 效应的种群模型就有这方面的性质。Allee 效应, 是以生物学家生态学家 Warder C. Allee(见 [1],[2],[3]) 来命名的, 表示种群的数量增长与种群大小或种群密度之间的关系 (见 [15]), 即当一个种群受到 Allee 效应时, 若它的种群密度过于稀疏, 则在某些方面将不利于种群的数量增长。

在某些情况下, 由 Allee 效应所引起的种群的数量增长与种群的密度呈正相关性, 即当种群的密度过于稀疏时, 它的出生率将减小。Allee 效应有弱 Allee 效应和强 Allee 效应两种类型 (见 [19],[7])。种群受到强 Allee 效应作用时, 若它的种群密度过于稀疏或过于拥挤, 则种群将出现负出生率, 最终趋于灭绝。但是对 Allee 效应的研究, 绝大部分学者都仅针对强 Allee 效应, 而忽略了弱 Allee 效应。从生物学家 Allee 最先的研究时所举的例子里我们知道 Allee 效应还包括弱 Allee 效应 (见 [1],[2],[3],[8],[14],[15],[19],[20],[21],[26])。当种群受到弱 Allee 效应时, 当它的种群密度过于稀疏时, 它的出生率将变小, 但从不会出现负出生率的情况。

对于相互作用的生物种群, 弱 Allee 效应又会对它们产生什么影响呢? 仅很少的文章研究了弱 Allee 效应对捕食 - 食饵系统的动力行为的影响 (见 [9],[21],[27])。由王刚及其它人的研究结果, 我们可看到弱 Allee 效应是捕食 - 食饵系统的不稳定因素。

在本文中, 我们主要探讨具有非单调功能反应的捕食 - 食饵系统, 当它的食饵上具有弱 Allee 效应时系统的动力行为。非单调功能反应主要是由于食饵对于捕食者的攻击具有群体防御, 已有很多实验证明了自然界中非单调功能反应的存在性, 见 [23],[24],[28]。我们的研究主要是源于 Ruan & Xiao,



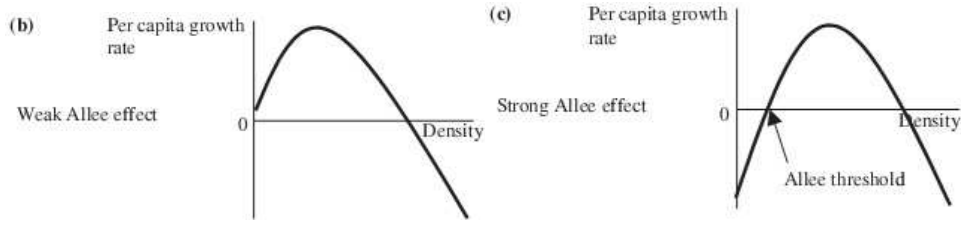


Figure 1: Definition of the demographic Allee effects. The positive relationship between per-capita growth rate and density when density is low defines an Allee effects as in both (b) and (c). When per-capita growth rate is negative below a threshold density, this is a strong or critical Allee effects as in (c).

它们对如下的具有非单调功能反应的捕食 - 食饵系统进行了系统的研究:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{mxy}{a + x^2}, \\ \dot{y}(t) = y(-d + \frac{umx}{a + x^2}). \end{cases} \quad (1)$$

在模型 (1) 中,  $x(t)$  和  $y(t)$  分别代表食饵和捕食者在  $t$  时刻的数量,  $r, K, m, a, u$  都为正数,  $r$  代表食饵的内禀增长率,  $K$  代表食饵的环境容纳量,  $d$  表示捕食者的死亡率, 而  $p(x) = \frac{mx}{a+x^2}$  表示非单调功能反应。Ruan & Xiao 的文章指出, 当我们选取食饵的环境容纳量和捕食者的死亡率作为分支参数时, 系统将出现一系列的分支, 这包括鞍 - 结分支、超临界和亚临界 Hopf 分支, 同宿环分支, 另外, 由 Bogdanov 的定理 ([4],[5]) 和 Takens 的定理 ([7]), 作者指出系统也将出现 Bogdanov-Takens 分支。

在系统 (1) 的基础上, 我们引入弱 Allee 效应 (Fig1(左图)) 到系统的食饵  $x$  上, 从而得到本文我们所要研究的模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{K})\frac{x}{x+A} - \frac{mxy}{a + x^2} \\ \dot{y}(t) = y(-d + \frac{umx}{a + x^2}) \end{cases} \quad (2)$$

这里  $q(x) = \frac{x}{x+A}$  表示弱 Allee 效应项,  $A > 0$  为 “弱 Allee 效应常数” (见

[21])。显然当  $A = 0$  时, 系统 (2) 就变成系统 (1), 而当  $A$  越大, 表示具有的弱 Allee 效应越大。

本文主要研究了系统 (2) 的全局动力性质及分支情况, 从而得到  $A$  对系统 (1) 的影响。我们主要参考 [22],[23],[24],[28] 的数学方法。

本文安排如下: 在第二章, 我们研究了具有 Allee 效应的捕食 - 食饵系统的平衡点存在情况及局部动力性质分析, 在第三章, 我们研究了系统有可能出现的所有分支情况, 包括: 鞍 - 结分支、超临界和亚临界 Hopf 分支, 及 Bogdanov-Takens 分支, 并表明参数  $r$  不对系统的分支产生影响。文章的最后我们以一个简明的讨论来结束本文。

## 第二章 具有弱 Allee 效应的捕食 - 食饵系统平衡点及局部分析

系统 (2) 包含 7 个参数, 每个参数都有其生物意义。我们可以通过进行变换:  $(t, x, y) \rightarrow (\frac{\sqrt{a}}{mu}, \sqrt{a}x, \sqrt{a}uy)$ , 同时用  $\frac{\sqrt{a}r}{mu}$  来取代  $r$ , 用  $\frac{K}{\sqrt{a}}$  来取代  $K$ , 用  $\frac{A}{\sqrt{a}}$  来取代  $A$ , 用  $\frac{\sqrt{a}d}{mu}$  来取代  $d$ , 从而消去系统 (2) 中的变量  $a, m$ , 和  $u$ 。

另外, 可用变换:  $(t, x, y) \rightarrow (\frac{1}{m}, x, y)$  并用  $\frac{r}{m}$  来取代  $r$ , 用  $\frac{d}{m}$  来取代  $d$ , 那么系统 (2) 将变成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{K})\frac{x}{x+A} - \frac{xy}{a+x^2} \\ \dot{y}(t) = y(-d + \frac{ux}{a+x^2}) \end{cases} \quad (2.1)$$

从生物的观点来看, 我们仅对系统 (2.1) 在第一象限  $R_+^2$  内的情况感兴趣, 因此我们只考虑生物上有意义的初值  $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$  下系统 (2.1) 的动力行为。

首先, 我们先探索系统的平衡点所处的位置及平衡点的个数, 显然, 系统在非负区域有两个边界平衡点: 其一为  $E_0 = (0, 0)$ , 表示捕食者和食饵最终都将灭绝, 另一为  $E_K = (K, 0)$ , 代表捕食者最终灭绝, 而食饵数量最终将达到环境容纳量。

当系统 (2.1) 在第一象限  $R_+^2$  内存在平衡点 (即最终两种群共存的平衡点), 则需满足下面这个方程:

$$\begin{cases} r(1 - \frac{x}{K})\frac{x}{x+A} - \frac{y}{a+x^2} = 0, \\ -d + \frac{ux}{a+x^2} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

存在一个正解  $(x, y)$  显然方程 (2.2) 最多存在两个解:  $E_1 = (x_1, y_1), E_2 =$

$(x_2, y_2)$  其中

$$x_1 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4ad^2}}{2d}, y_1 = \frac{rx_1(1 - \frac{x_1}{K})(a + x_1^2)}{x_1 + A};$$

$$x_2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4ad^2}}{2d}, y_2 = \frac{rx_2(1 - \frac{x_2}{K})(a + x_2^2)}{x_2 + A}.$$

因此, 我们有下面这样一个关于系统 (2.1) 的点的平衡点的个数及所处位置的引理。证明略。

### 引理 2.1.

(1). 当  $u^2 - 4ad^2 < 0$ , 系统 (2.1) 有两个边界平衡点  $E_0, E_K$ 。

(2). 当  $u^2 - 4ad^2 = 0$ , 系统 (2.1) 有三个平衡点  $E_0, E_K,$

$E_{12} = (x_{12}, y_{12})$ , 其中

$$x_{12} = \frac{u}{2d}, y_{12} = \frac{rx_{12}(1 - \frac{x_{12}}{K})(a + x_{12}^2)}{x_{12} + A}.$$

(3). 当  $u^2 - 4ad^2 > 0$ ,

若  $K < x_1$ , 系统 (2.1) 有两个平衡点:  $E_0, E_K$ .

若  $x_1 < K < x_2$ , 系统 (2.1) 有三个平衡点:  $E_0, E_K, E_1$ .

若  $x_1 < x_2 < K$ , 系统 (2.1) 有四个平衡点:  $E_0, E_K, E_1, E_2$ .

当  $\sqrt{u^2 - 4ad^2} < 0$  时, 对任意的  $x > 0$  都有  $-d + \frac{ux}{a+x^2} < 0$ , 同时  $\dot{y}(t) < 0$ 。

因此当  $x_0 > 0, y_0 > 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)(t, t_0, x_0, y_0) = 0$ 。这表明捕食者最终将灭绝。从数学上讲,  $u^2 - 4ad^2 = 0$  是一个鞍 - 结分支面。当系统的参数从该分支面的一端变到另一端, 系统的平衡点的个数将发生改变。

现在我们来考虑系统 (2.1) 的每个平衡点小邻域内的动力性质。系统 (2.1) 的平衡点  $(x_i, y_i)$  的线性部分是由:

$$V(x_i, y_i) = \begin{pmatrix} F(x_i, y_i) & -\frac{x_i}{a+x_i^2} \\ \frac{uy_i(a-x_i^2)}{(a+x_i^2)^2} & \frac{ux_i}{a+x_i^2} - d \end{pmatrix}_{(x_i, y_i)}$$

来决定的, 其中  $F(x_i, y_i) = r[(1 - \frac{x_i}{K})\frac{x_i}{x_i+A} - \frac{x_i}{K}\frac{x_i}{x_i+A} + x_i(1 - \frac{x_i}{K})\frac{x_i}{(x_i+A)^2}] - \frac{a-x_i^2}{(a+x_i^2)^2}y_i$ 。通过求矩阵  $V(x, y)$  在平衡点处的特征根, 我们就能得到系统 (2.1)

在平衡点小邻域内的局部动力性质。从而有：

$E_0$  是鞍 - 结点，它的抛物扇形在  $R_+^2$  上。

若  $-d + \frac{uK}{a+K^2} < 0$ ，则  $E_K$  是稳定结点；

若  $-d + \frac{uK}{a+K^2} > 0$ ，则  $E_K$  是鞍点。

若  $-d + \frac{uK}{a+K^2} = 0$ ，则  $E_K$  将过超临界分支面。

对于正平衡点  $E_1, E_2$ ，因为  $\det(V(x_2, y_2)) = \frac{x_2}{a+x_2^2} \frac{uy_2(a-x_2^2)}{(a+x_2^2)^2} < 0$  所以  $E_2$  为鞍点；又因为  $\det(V(x_1, y_1)) = \frac{x_1}{a+x_1^2} \frac{uy_1(a-x_1^2)}{(a+x_1^2)^2} > 0$ ，且  $V(x_1, y_1)$  的迹  $tr(V(x_1, y_1)) = F(x_1, y_1)$ 。因此，当  $F(x_1, y_1) < 0$  时， $E_1$  是稳定的，而当  $F(x_1, y_1) > 0$  时， $E_1$  将不稳定的。

随着  $d$  的增加，系统将从稳定状态逐步变得开始出现分支情况，如下：

1. 若  $K < x_{12}$  且  $-d + \frac{uK}{a+K^2} = 0$ 。当  $K = x_1$  时，系统将出现包含  $E_1$  和  $E_K$  的超临界分支， $E_K$  将从稳定结点变成不稳定的鞍点。而当  $u^2 = 4ad^2$  时，系统在非负区域内将出现包含  $E_1$  和  $E_2$  的鞍 - 结分支。
2. 若  $K > x_{12}$  且  $-d + \frac{uK}{a+K^2} = 0$ 。当  $K = x_2$  时，系统将出现包含  $E_2$  和  $E_K$  的超临界分支。 $E_K$  将从不稳定的鞍点变成稳定结点。而当  $u^2 = 4ad^2$  时，系统在非负区域内将出现包含  $E_1$  和  $E_2$  的鞍 - 结分支。
3. 若  $K = x_{12}$  且  $-d + \frac{uK}{a+K^2} = 0$ ， $u^2 = 4ad^2$  了，那么  $E_K, E_1, E_2$  和  $E_{12}$  都合并于点  $E_K$ 。此时  $E_K$  是退化的渐近稳定结点。

**注 2.1** 比较以上的分析结果与 Xiao&Ruan[24] 的模型 (1) 的结果可知“弱 Allee 效应常数”  $A$  并不影响系统的正平衡点的存在及个数，但随着  $A$  的增大，正平衡点  $E_i$  里的  $y_i$  的值将减小 ( $i = 1, 2$ )，当  $A \rightarrow \infty$  时， $y_i \rightarrow 0$ 。

**定理 2.2.** 当  $u^2 = 4ad^2$  且  $\frac{u}{2d} < K$  时，系统 (2.1) 有三个平衡点：其中  $E_0$  是鞍 - 结点， $E_K$  是稳定结点， $E_{12}$  是正平衡点，且

(i). 若  $K < \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$ ，则  $E_{12}$  为鞍结点，它的邻域是由两个双曲扇形和一个抛物扇形组成的；其中抛物扇形位于  $y$  轴和平衡点之间。

(ii). 若  $K > \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$ ，则  $E_{12}$  为鞍结点，它的邻域是由两个双曲扇形和

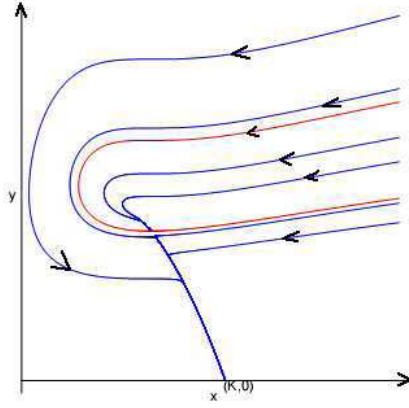


Figure 2: The phase portrait of system (2.1) when  $u^2 = 4ad^2$  but  $\frac{u}{2d} < K < \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$

一个抛物扇形组成的；其中双曲扇形位于  $y$  轴和平衡点之间.

(iii). 若  $K = \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$ , 则  $E_{12}$  是尖点, 它的邻域是由两个双曲扇形和两条分界轨线组成的. 其中一条分界轨线趋于正平衡点  $E_{12}$  而其它所有轨线都趋于点  $(K, 0)$ . 因此, 这也从数学上解释了当食饵是足够多而捕食者却灭绝的矛盾情况. 其图见 Fig2.

**证明.** 我们仅对情况 (iii) 进行证明. 当  $u^2 = 4ad^2$ ,  $K = \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$  时, 系统 (2.1) 有唯一的一个正平衡点  $E_{12}$ . 我们可以把系统经过一系列变换, 将系统 (2.1) 变成标准形式. 首先进行变换:

$$X = x - x_{12}, Y = y - y_{12}$$

则把  $E_{12}$  移到原点  $E_0$ . 将系统 (2.1) 的方程右边关于原点进行 Taylor 展开,

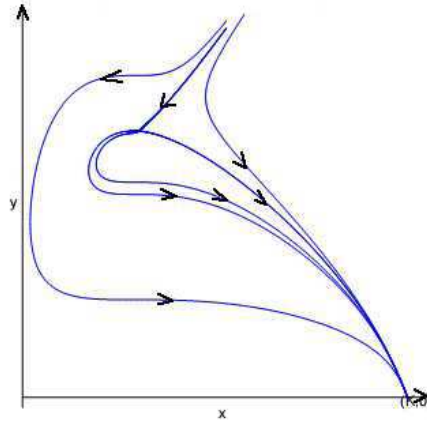


Figure 3: The phase portrait of system (2.1) when  $u^2 = 4ad^2$  but  $K > \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$ .

从而有

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -\frac{x_{12}}{a+x_{12}^2}Y + \left(-\frac{dr(u+6Ad)}{(u+2Ad)(u+3Ad)} + \frac{x_{12}y_{12}}{(a+x_{12}^2)^2}\right)X^2 + P_{10}(X, Y), \\ \dot{Y}(t) = \frac{ux_{12}y_{12}}{(a+x_{12}^2)^2}X^2 + P_{20}(X, Y), \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $P_{i0}(i=1,2)$  在  $(X, Y)$  上是光滑函数, 且  $P_{i0}(X, Y) = O(|(X, Y)|^3)$ 。

再进行下面这个变换:

$$X = X, Z = -\frac{x_{12}}{a+x_{12}^2}Y$$

则有

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Z + \left(-\frac{dr(u+6Ad)}{(u+2Ad)(u+3Ad)} + \frac{x_{12}y_{12}}{(a+x_{12}^2)^2}\right)X^2 + P_{11}(X, Z), \\ \dot{Z}(t) = \frac{ux_{12}^2y_{12}}{(a+x_{12}^2)^3}X^2 + P_{21}(X, Z). \end{cases} \quad (2.4)$$

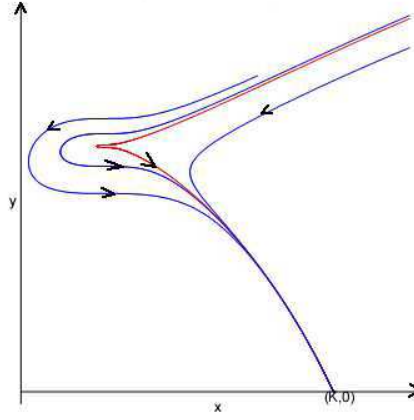


Figure 4: The phase portrait of system(2.1)when  $u^2 = 4ad^2$  and  $K = \frac{u^2+3uAd}{ud+4A^2d}$ .

其中  $P_{i1}(i = 1, 2)$  在  $(X, Z)$  上是光滑函数, 且  $P_{i1}(X, Z) = O(|(X, Z)|^3)$ 。而由变换:

$$\mu = X, \nu = Z + \left( -\frac{dr(u + 6Ad)}{(u + 2Ad)(u + 3Ad)} + \frac{x_{12}y_{12}}{(a + x_{12}^2)^2} \right) X^2 + P_{11}(X, Z)$$

我们有

$$\begin{cases} \dot{\mu}(t) = \nu, \\ \dot{\nu}(t) = \delta_1 \mu^2 + \delta_2 \mu \nu + P_{22}(\mu, \nu). \end{cases} \quad (2.5)$$

其中  $P_{22}$  在  $(\mu, \nu)$  上是光滑函数, 且  $P_{22}(\mu, \nu) = O(|(\mu, \nu)|^3)$ 。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{ux_{12}^2y_{12}}{(a + x_{12}^2)^3} = \frac{rd^2}{2(u + 3Ad)} > 0 \\ \delta_2 &= 2\left( -\frac{dr(u + 6Ad)}{(u + 2Ad)(u + 3Ad)} + \frac{x_{12}y_{12}}{(a + x_{12}^2)^2} \right) \\ &= \frac{rd(-u - 10Ad)}{2(u + 2Ad)(u + 3Ad)} < 0 \end{aligned}$$

从而我们得到  $E_{12}$  是系统 (2.1) 的余维为 2 的尖点。  $\square$

**注 2.2** 由定理 2.2 的 (ii) 我们有与 [24] 的 2.2.2 相类似的结论, 即当环境容纳量  $K$  充分大时, 食饵足够多, 捕食者却灭绝, 这也验证了 "Paradox of



Degree papers are in the “[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)”. Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to [etd@xmu.edu.cn](mailto:etd@xmu.edu.cn) for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库